电磁漫谈—从毕奥萨伐尔定律到相对论

Guozhi Ji (姬国智)
High School Affiliated to Renmin University of China, Beijing, China

摘　要

本篇文章从高中课内电磁学内容讲起，在回顾对于电磁的认识历程基础上提出了在相对论尺度下的协变量和非协变量的概念。接着从最简单的平行电流元模型出发，借助库仑定律和尺缩效应推导出了该情况下的磁力表达式并利用小量近似导出了毕奥萨伐尔定律。最后给出了三维形式洛伦兹力的洛伦兹变换，更加全面地阐释了电与磁之间的内在联系。

在高中的时候，我们学电磁学时常常把电和磁拆成不同的部分学。我们对于电磁场的初步认识来自于库仑定律和毕奥萨伐尔定律，即静电场和静磁场。等到我们学的更多时，我们可以认识到电磁感应，并能感性理解电磁波。如果我们再进一步，或许会知道麦克斯韦方程组，了解了电磁互作的基本方式。但是，电与磁的本质究竟是什么？这引人深思。

首先，我问一个问题：库仑定律和毕奥萨伐尔定律

$$\overrightarrow{E} = \frac{q\overrightarrow{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{Id\overrightarrow{l} \times \overrightarrow{r}}{r^3} \tag{2}$$

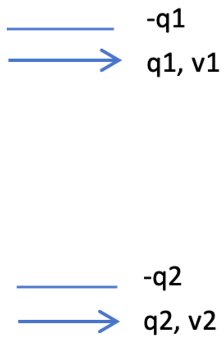
和洛伦兹力的公式

$$F = q\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} + q\overrightarrow{E} \tag{3}$$

这三个公式哪些是普遍适用的公式？大部分人可能认为都普遍适用，然而，事实并非如此。(1) 和 (2) 本质上都是实验定律，并非符合所有情况，而 (3) 则是普遍满足的，通过其洛伦兹协变的性质，可以推导出普遍的电场和磁场表达式，我将会在后续给出论证。但是，这里提到的所有的情况又是什么呢？实际上，正是大家都了解过的时空理论——相对论。

这个时候有人就要问了，相对论不是只有高速情况下才应该考虑吗？这个观点是对的，低速情况下两个定律与用相对论方法处理后的结果是一样的。但是我们忽略了一个重要的事情：磁场本身就来自于电流的相对论效应，如果忽略相对论效应，磁力也不复存在。在这一部分，我将使用两平行电流元作为特例，半定量地分析磁场的产生，并进行讨论。

由于我们考虑的仅仅是电流的相对论效应，因此满足单位长度总电荷为 0。于是我们能画出以下的物理图像：



这是两个平行电流元，大小等于 qv，对于每个电流元可以分成“运动元”和“不动元”，我们可以考虑另外一个电流元对其相对论效应并进行累加。我们不妨计算电流元 1 对电流元 2 的力。对于所有子电流元，根据相对论尺缩效应，有

$$l' = l\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{4}$$

又由于电荷守恒，因此电荷线密度有

$$\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{5}$$

考虑电流元长度不变，因此有

$$q' = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

这个时候我们运用库仑定律表示出其总受力，有

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(q_2\frac{-q_1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} + q_2\frac{q_1}{\sqrt{1-\frac{(v_1-v_2)^2}{c^2}}} + (-q_2)(-q_1) + (-q_2)\frac{q_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\right). \tag{7}$$

这个时候读者也许会疑惑，这表达式与磁力相差甚远啊。别急，我们还需要再做一步小量近似。运用近似公式，

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \; (when \; x \ll 1) \tag{8}$$

得到

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2}\left(-c^2 - \frac{v_2^2}{2} + c^2 + \frac{(v_1-v_2)^2}{2} + c^2 - c^2 - \frac{v_1^2}{2}\right). \tag{9}$$

化简得

$$F = \frac{q_1 v_1 q_2 v_2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^2}. \tag{10}$$

这与 (2) 式很像了，只要我们注意到恒等式

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}, \tag{11}$$

就推导出了特殊情况下的 (2) 式了。实际上，(11) 式的特例证明正可以用 (10) 和 (2) 联合得到。这种方式下，我们能感性地理解磁力的本质。

实际上，我们还可以把事情变得更普遍一些。运用相对论的基本假设和洛伦兹力的普遍性，

我们可以对其进行相对论变换，得到以下：

$$\begin{cases} E'_x = E_x, \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y), \\ B'_x = B_x, \\ B'_y = \gamma(B_y + \frac{v^2}{c^2}E_z), \\ B'_z = \gamma(B_z - \frac{v^2}{c^2}E_y), \\ \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{12}$$

即为点电荷的相对论电磁场变换，我们利用这些结论，可以更普遍地推导电磁场中的现象。这个时候，我们会发现电磁现象与相对论息息相关，电磁这种协调下的统一正诠释了宇宙的美丽。

最后，我想用牛顿的一句话结束这篇探讨较为浅显的文章，“我不知道世人怎样看我，但我自己以为我不过像一个在海边玩耍的孩子，不时为发现比寻常更为美丽的一块卵石或一片贝壳而沾沾自喜，至于展现在我面前的浩瀚的真理海洋，却全然没有发现。”我们在探索物理学的过程中，不应仅仅局限于唯象的理论，更应该不断深入，去了解事物运作的内在关系。这才是物理学真正震撼人心之处。