一道数之谜原创二试模拟题的进一步改进

Runbo Li (李润博)
High School Affiliated to Renmin University of China, Beijing, China

摘　要

在本文中，我们证明了在任意 1400 个互不相同的实数中，都能找到三个数 x, y, z 满足

$$\left|\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^4+y^4+z^4+1}\right| < \frac{1}{1500000}.$$

这一结果改进了龚固的上界 $\frac{1}{1000000}$。

1　引言

数之谜原创题目二试模拟 4 的第二题为如下形式的一道不等式：求证在任意 1400 个互不相同的实数中，都能找到三个数 x, y, z 满足

$$\left|\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^4+y^4+z^4+1}\right| < \frac{1}{500}.$$

原题的证明较为简单，可以用三角函数证明。在 2022 年龚固将上面的上界改进为 $\frac{1}{15000}$，2024 年龚固 [1] 又改进到 $\frac{1}{100000}$。最近，他 [2] 进一步优化了证明，得到上界 $\frac{1}{1000000}$。在本文中，我们进一步改进了龚固的结论。

定理 1. 在任意 1400 个互不相同的实数中，都能找到三个数 x, y, z 满足

$$\left|\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^4+y^4+z^4+1}\right| < \frac{1}{1500000}.$$

2　定理 1 的证明

首先，在 1400 个实数中显然有至少 700 个数正负性相同，因此我们可以将问题简化为在 700 个正实数中找到三个数 x, y, z 满足

$$0 < \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{x^4+y^4+z^4+1} < \frac{1}{1500000}.$$

不妨设这 700 个正实数为 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{700}$。首先我们需要一个引理：

引理 1. 对于任意 $a > b > c > 0$，我们有

$$(a-b)(a-c)(b-c) \leqslant \frac{(a-c)^3}{4}.$$

证明. 用均值不等式即得。

下面我们分类讨论 a_i 的大小情况。

1. $a_1 \geqslant 2149$. 此时我们有

$$a_1 > a_2 > a_2 - a_{700} = (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{699} - a_{700}).$$

若等号右边的 698 个括号中的值均不小于 $\frac{a_1}{698}$，则我们有

$$a_1 > a_2 > a_2 - a_{700} > 698 \times \frac{a_1}{698} = a_1$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{2,3,\cdots,699\}$ 使得

$$a_k - a_{k+1} < \frac{a_1}{698}.$$

取 $\{x,y,z\} = \{a_1, a_k, a_{k+1}\}$，我们有

$$\frac{(a_1-a_k)(a_1-a_{k+1})(a_k-a_{k+1})}{a_1^4+a_k^4+a_{k+1}^4+1} < \frac{a_1^2(\frac{a_1}{648})}{a_1^4} < \frac{1}{698a_1} = \frac{1}{1500002} < \frac{1}{1500000}.$$

2. $a_1 < 2149, a_{21} \geqslant 769$. 此时我们有

$$1380 > a_1 - a_{21} = (a_1-a_3)+(a_3-a_5)+\cdots+(a_{19}-a_{21}).$$

若等号右边的 10 个括号中的值均不小于 138，则我们有

$$1380 > a_1 - a_{21} > 10 \times 138 = 1380$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{1,3,\cdots,19\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < 138.$$

取 $\{x,y,z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k-a_{k+1})(a_k-a_{k+2})(a_{k+1}-a_{k+2})}{a_k^4+a_{k+1}^4+a_{k+2}^4+1} < \frac{138^3}{4\times 3\times 769^4} = \frac{219006}{349707832321} < \frac{1}{1500000}.$$

3. $a_{21} < 769, a_{79} \geqslant 189$. 此时我们有

$$580 > a_{21} - a_{79} = (a_{21}-a_{23})+(a_{23}-a_{25})+\cdots+(a_{77}-a_{79}).$$

若等号右边的 29 个括号中的值均不小于 20，则我们有

$$580 > a_{21} - a_{79} > 29 \times 20 = 580$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{21,23,\cdots,77\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < 20.$$

取 $\{x,y,z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k-a_{k+1})(a_k-a_{k+2})(a_{k+1}-a_{k+2})}{a_k^4+a_{k+1}^4+a_{k+2}^4+1} < \frac{20^3}{4\times 3\times 189^4} = \frac{2000}{3827969523} < \frac{1}{1500000}.$$

4. $a_{79} < 189, a_{129} \geqslant 64$. 此时我们有

$$125 > a_{79} - a_{129} = (a_{79}-a_{81})+(a_{81}-a_{83})+\cdots+(a_{127}-a_{129}).$$

若等号右边的 25 个括号中的值均不小于 5，则我们有

$$125 > a_{79} - a_{129} > 25 \times 5 = 125$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{79,81,\cdots,127\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < 5.$$

取 $\{x,y,z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k-a_{k+1})(a_k-a_{k+2})(a_{k+1}-a_{k+2})}{a_k^4+a_{k+1}^4+a_{k+2}^4+1} < \frac{5^3}{4\times 3\times 64^4} = \frac{125}{201326592} < \frac{1}{1500000}.$$

5. $a_{129} < 64, a_{177} \geqslant 28$. 此时我们有

$$36 > a_{129} - a_{177} = (a_{129}-a_{131})+(a_{131}-a_{133})+\cdots+(a_{175}-a_{177}).$$

若等号右边的 24 个括号中的值均不小于 1.5，则我们有

$$36 > a_{129} - a_{177} > 24 \times 1.5 = 36$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{129, 131, \cdots, 175\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < 1.5.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{1.5^3}{4 \times 3 \times 28^4} = \frac{9}{19668992} < \frac{1}{1500000}.$$

6. $a_{177} < 28, a_{195} \geqslant 19$. 此时我们有

$$9 > a_{177} - a_{195} = (a_{177} - a_{179}) + (a_{179} - a_{181}) + \cdots + (a_{193} - a_{195}).$$

若等号右边的 9 个括号中的值均不小于 1，则我们有

$$9 > a_{177} - a_{195} > 9 \times 1 = 9$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{177, 179, \cdots, 193\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < 1.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{1^3}{4 \times 3 \times 19^4} = \frac{1}{1563852} < \frac{1}{1500000}.$$

7. $a_{195} < 19, a_{291} \geqslant 7$. 此时我们有

$$12 > a_{195} - a_{291} = (a_{195} - a_{197}) + (a_{197} - a_{199}) + \cdots + (a_{289} - a_{291}).$$

若等号右边的 48 个括号中的值均不小于 $\frac{1}{4}$，则我们有

$$12 > a_{195} - a_{291} > 48 \times \frac{1}{4} = 12$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{195, 197, \cdots, 289\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < \frac{1}{4}.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{(\frac{1}{4})^3}{4 \times 3 \times 7^4} = \frac{1}{1843968} < \frac{1}{1500000}.$$

8. $a_{291} < 7, a_{301} \geqslant 6$. 此时我们有

$$1 > a_{291} - a_{301} = (a_{291} - a_{293}) + (a_{293} - a_{295}) + \cdots + (a_{299} - a_{301}).$$

若等号右边的 5 个括号中的值均不小于 $\frac{1}{5}$，则我们有

$$1 > a_{291} - a_{301} > 5 \times \frac{1}{5} = 1$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{291, 293, \cdots, 299\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < \frac{1}{5}.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{(\frac{1}{5})^3}{4 \times 3 \times 6^4} = \frac{1}{1944000} < \frac{1}{1500000}.$$

9. $a_{301} < 6, a_{313} \geqslant 5$. 此时我们有

$$1 > a_{301} - a_{313} = (a_{301} - a_{303}) + (a_{303} - a_{305}) + \cdots + (a_{311} - a_{313}).$$

若等号右边的 6 个括号中的值均不小于 $\frac{1}{6}$，则我们有

$$1 > a_{301} - a_{313} > 6 \times \frac{1}{6} = 1$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{301, 303, \cdots, 311\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < \frac{1}{6}.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{(\frac{1}{6})^3}{4 \times 3 \times 5^4} = \frac{1}{1620000} < \frac{1}{1500000}.$$

10. $a_{313} < 5, a_{329} \geqslant 4$. 此时我们有

$$1 > a_{313} - a_{329} = (a_{313} - a_{315}) + (a_{315} - a_{317}) + \cdots + (a_{327} - a_{329}).$$

若等号右边的 8 个括号中的值均不小于 $\frac{1}{8}$，则我们有

$$1 > a_{313} - a_{329} > 8 \times \frac{1}{8} = 1$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{313, 315, \cdots, 327\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < \frac{1}{8}.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{(\frac{1}{8})^3}{4 \times 3 \times 4^4} = \frac{1}{1572864} < \frac{1}{1500000}.$$

11. $a_{329} < 4, a_{353} \geqslant 3$. 此时我们有

$$1 > a_{329} - a_{353} = (a_{329} - a_{331}) + (a_{331} - a_{333}) + \cdots + (a_{351} - a_{353}).$$

若等号右边的 12 个括号中的值均不小于 $\frac{1}{12}$，则我们有

$$1 > a_{329} - a_{353} > 12 \times \frac{1}{12} = 1$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{329, 331, \cdots, 351\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < \frac{1}{12}.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{(\frac{1}{12})^3}{4 \times 3 \times 3^4} = \frac{1}{1679616} < \frac{1}{1500000}.$$

12. $a_{353} < 3, a_{537} \geqslant 1$. 此时我们有

$$2 > a_{353} - a_{537} = (a_{353} - a_{355}) + (a_{355} - a_{357}) + \cdots + (a_{535} - a_{537}).$$

若等号右边的 92 个括号中的值均不小于 $\frac{1}{46}$，则我们有

$$2 > a_{353} - a_{537} > 92 \times \frac{1}{46} = 2$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{353, 355, \cdots, 535\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < \frac{1}{46}.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{(\frac{1}{46})^3}{4 \times (1 + 1 + 1 + 1)} = \frac{1}{1557376} < \frac{1}{1500000}.$$

13. $a_{537} < 1$. 此时我们有

$$1 > a_{537} > a_{537} - a_{699} = (a_{537} - a_{539}) + (a_{539} - a_{541}) + \cdots + (a_{697} - a_{699}).$$

若等号右边的 81 个括号中的值均不小于 $\frac{1}{81}$，则我们有

$$1 > a_{537} - a_{699} > 81 \times \frac{1}{81} = 1$$

矛盾。因此必存在 $k \in \{537, 539, \cdots, 697\}$ 使得

$$a_k - a_{k+2} < \frac{1}{81}.$$

取 $\{x, y, z\} = \{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$ 并用引理 1，我们有

$$\frac{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})(a_{k+1} - a_{k+2})}{a_k^4 + a_{k+1}^4 + a_{k+2}^4 + 1} < \frac{(\frac{1}{81})^3}{4 \times (0 + 0 + 0 + 1)} = \frac{1}{2125764} < \frac{1}{1500000}.$$

综合上述 13 种情况，我们就完成了定理 1 的证明。

参考文献

[1] 龚固. “一道模拟题的二次加强”. In: 天空的数学小天地 (2024).

[2] 龚固. “我也来个学习意志”. In: 天空的数学小天地 (2025).